Lineární obvody a systémy

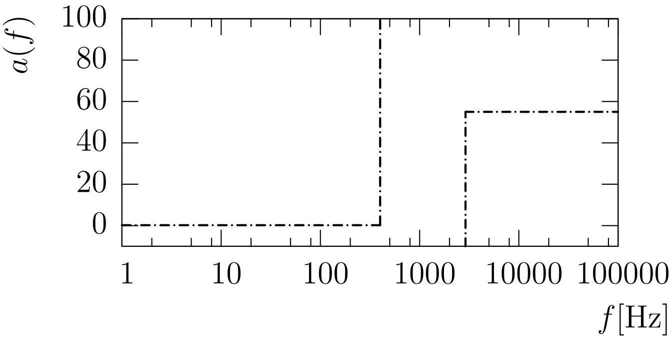
Dolní propust

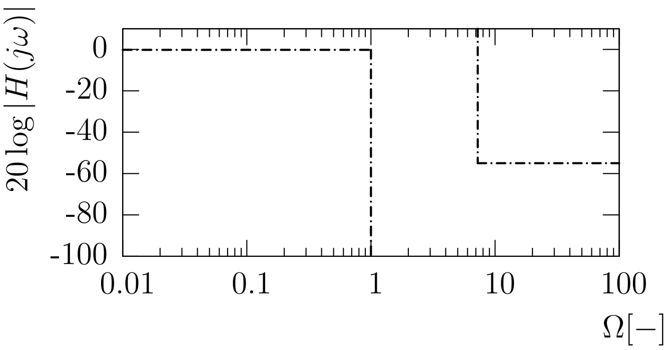
Ondřej Jirman

login:	jirmao1
úloha:	dp – 2
semestr:	letní 2005
cvičení:	středa 14:30
cvičící:	Jana Tučková

Zadání

1. Navrhněte dolní propust s parametry: $a_p = 0,2\,\mathrm{dB}$, $a_s = 55\,\mathrm{dB}$, $f_p = 400\,\mathrm{Hz}$, $f_s = 2900\,\mathrm{Hz}$.
2. Navrhněte schéma LC filtru pro Butterworthovu a Čebyševovu aproximaci. Hodnoty součástek zpracujte do tabulky.
3. Navrhněte schema filtru realizovaného kaskádní syntézou pro vybranou aproximaci.
4. Porovnejte hodnoty zlomového kmitočtu ω_0 a činitele jakosti Q pro dílčí přenosové funkce při kaskádní syntéze pro jednotlivé aproximace.
5. V jednom grafu orientačně zakreslete průběhy modulu přenosu v logaritmickém měřítku pro jednotlivé aproximace pro ideální součástky a s uvažováním činitele jakosti Q cívek. (Resp. ve dvou grafech—celkový průběh, t.j. orientace na nepropustné pásmo a detail propustného pásma.)
6. Provnejte jednotlivé aproximace.





1 Výpočet aproximací

Nejprve znormujeme toleranční schéma a nalezneme Butterworthovu a Čebyševovu aproximaci, která vyhovuje zadaným parametrům filtru:

$$\Omega_p = 1 \tag{1}$$

$$\Omega_s = \frac{f_s}{f_p} = 7.250000 \tag{2}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{10^{0,1a_p} - 1}{10^{0,1a_s} - 1}} = 0.000386 \tag{3}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1a_p} - 1} = 0.217030 \tag{4}$$

1.1 Butterworthova aproximace

Vypočteme stupeň Butterworthovy aproximace[1]:

$$n = \left\lceil -\frac{\log k_1}{\log \Omega_s} \right\rceil = 4 \tag{5}$$

Nyní určíme novou hodnotu paramteru a_s:

$$a_s = 10 \log \left(1 + \varepsilon^2 \Omega_s^{2n}\right) = 55.557000\,\mathrm{dB} \tag{6}$$

Dále vypočteme póly Butterworthovy aproximace z rovnic:

$$r = -\alpha_0 = 1/\varepsilon^{1/n} = 1.465100 \tag{7}$$

$$s_\mu = r \left[-\sin \frac{(2\mu - 1)\pi}{2n} + j \cos \frac{(2\mu - 1)\pi}{2n} \right] = \alpha_\mu + j\beta_\mu \qquad \mu = 1...4 \tag{8}$$

Dosazením získáme:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1.35360 + 0.56066j \\ s_2 &= -1.35360 - 0.56066j \\ s_3 &= -0.56066 + 1.35360j \\ s_4 &= -0.56066 - 1.35360j \end{aligned}$$

Hodnoty konstant α_μ a β_μ tedy jsou:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1.35360 & \beta_1 &= 0.56066 \\ \alpha_2 &= -1.35360 & \beta_2 &= -0.56066 \\ \alpha_3 &= -0.56066 & \beta_3 &= 1.35360 \\ \alpha_4 &= -0.56066 & \beta_4 &= -1.35360 \end{aligned}$$

Nyní již můžeme vypočítat přenosovou funkci ze vztahů:

$$H_B(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \left[(s + r) \displaystyle\prod_{\mu=1}^{(n-1)/2} \left(s^2 - 2\alpha_\mu s + r^2\right) \right]^{-1} & \text{pro lichá } n \\ \dfrac{1}{\varepsilon} \left[\displaystyle\prod_{\mu=1}^{n/2} \left(s^2 - 2\alpha_\mu s + r^2\right) \right]^{-1} & \text{pro sudá } n \end{cases} \tag{9}$$

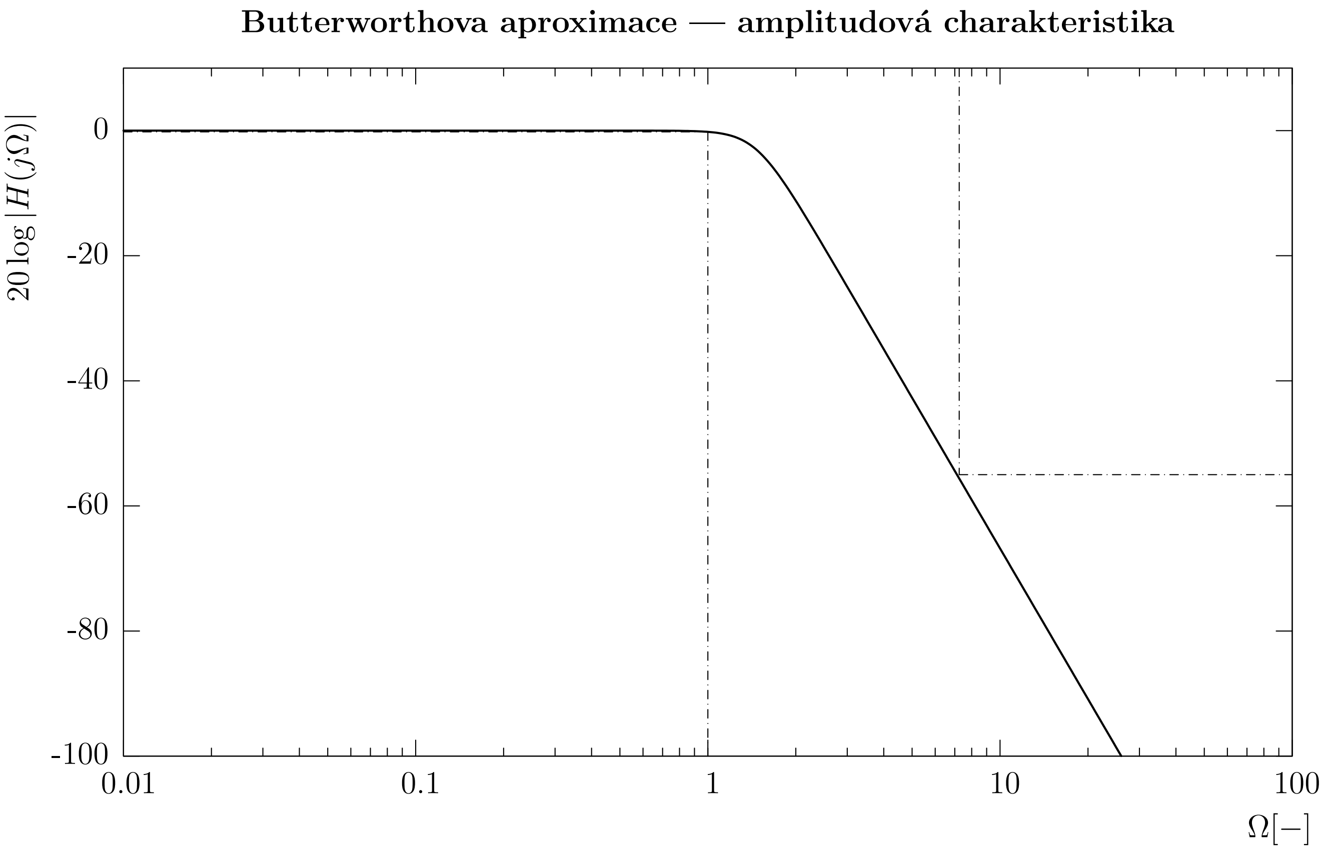
Dosazením získáme přenosovou funkci:

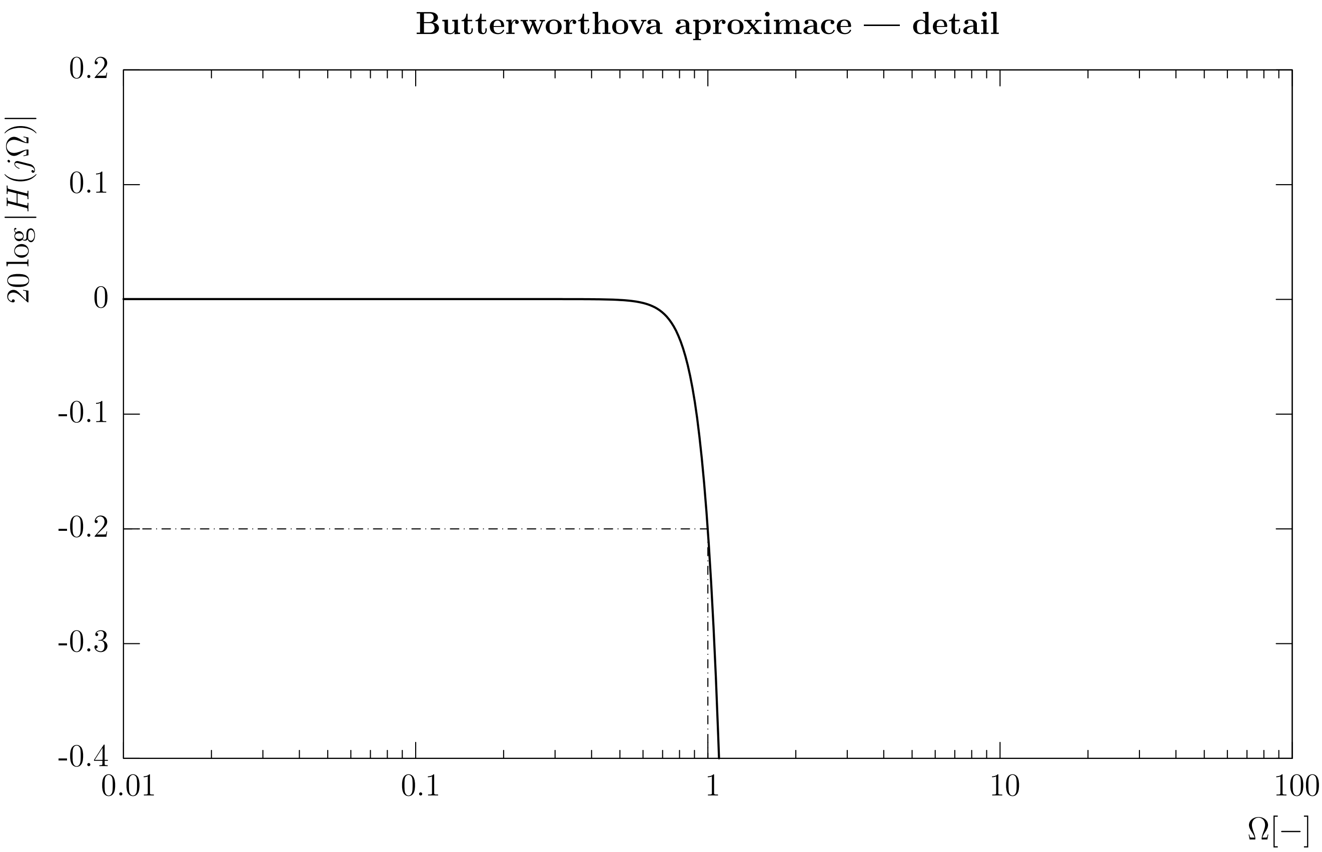
$$H_B(s) = \frac{1.00000}{0.21703s^4 + 0.83090s^3 + 1.59050s^2 + 1.78350s + 0.99997} \tag{10}$$

Skupinové zpoždění určíme ze vztahu:

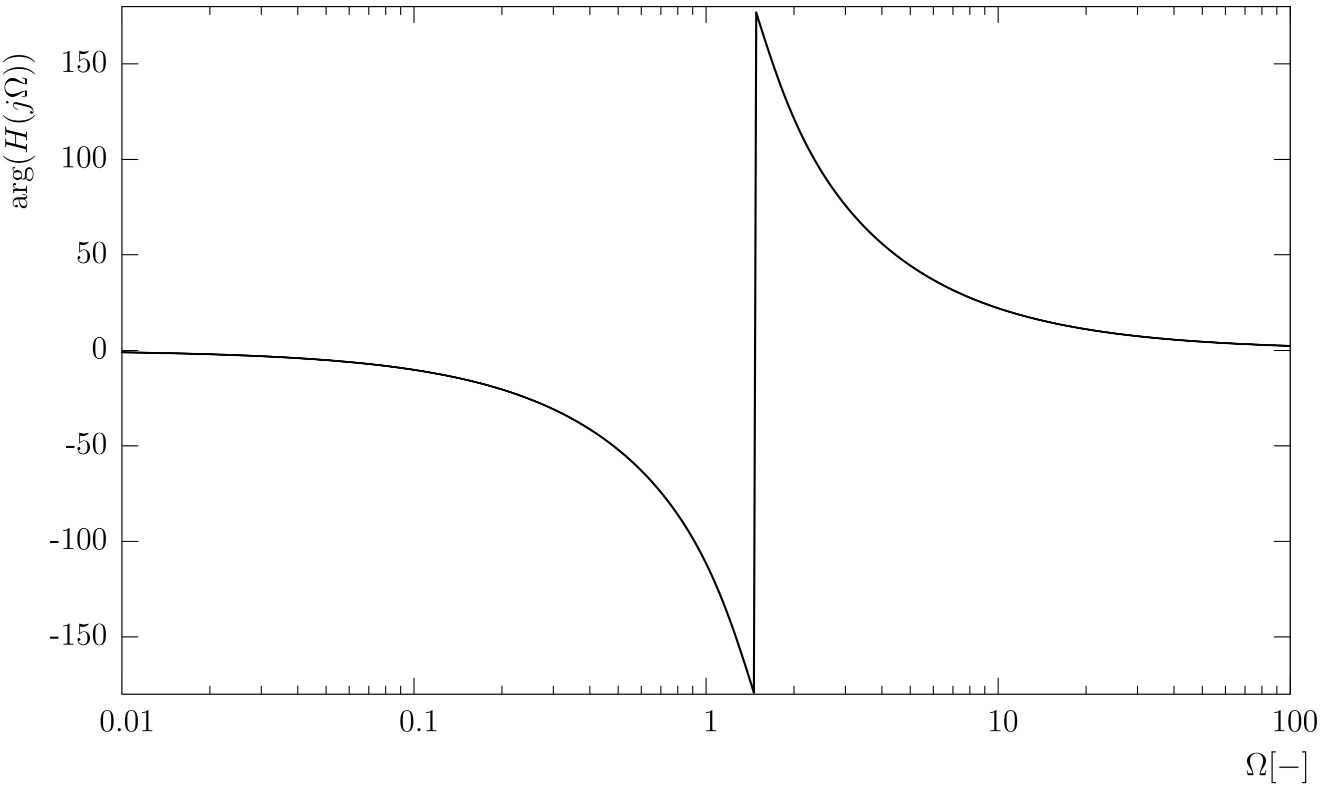
$$\tau_B(\Omega) = -\frac{\mathrm{d}\ \arg(H(j\Omega))}{\mathrm{d}\,\Omega} \tag{11}$$

[1] Speciální závorka znamená zaokrouhlování na nejbližší vyšší celé číslo.

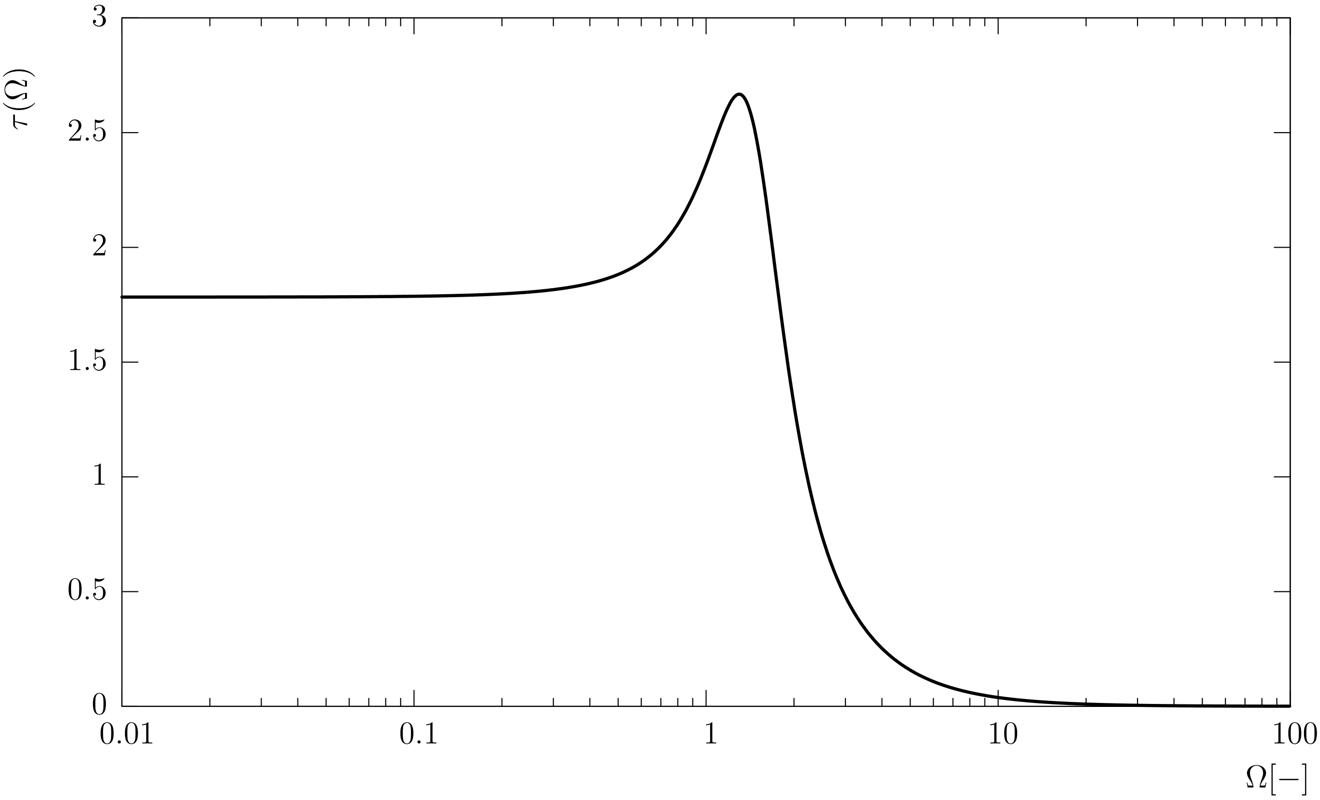

Butterworthova aproximace — amplitudová charakteristika
$20\log|H(j\Omega)|$
0
-20
-40
-60
-80
-100
0.01
0.1
1
10
100
$\Omega[-]$


Butterworthova aproximace — detail
$20\log|H(j\Omega)|$
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
0.01
0.1
1
10
100
$\Omega[-]$

Butterworthova aproximace — fázová charakteristika



Butterowrthova aproximace — skupinové zpoždění



1.2 Čebyševova aproximace

Stupeň Čebyševovy aproximace vypočteme ze vztahu:

$$n = \left\lceil \frac{\operatorname{arg\,cosh} \frac{1}{k_1}}{\operatorname{arg\,cosh} \Omega_s} \right\rceil = 4 \tag{12}$$

Nyní určíme novou hodnotu paramteru a_s:

$$a_s = 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 \cosh^2 \left(n \operatorname{arg\,cosh} \Omega_s \right) \right] = 73.454000 \, \mathrm{dB} \tag{13}$$

Vypočteme pomocné konstanty pro určení pólů Čebyševovy aproximace:

$$\psi = \sqrt{1+\varepsilon^2}, \quad a = \frac{1}{2\sqrt[n]{\varepsilon}} \left(\sqrt[n]{\psi+1} - \sqrt[n]{\psi-1} \right), \quad b = \frac{1}{2\sqrt[n]{\varepsilon}} \left(\sqrt[n]{\psi+1} + \sqrt[n]{\psi-1} \right) \tag{14}$$

Nyní již můžeme vypočítat póly dosazením do rovnice:

$$s_\mu = -a \sin \frac{(2\mu-1)\pi}{2n} + jb \cos \frac{(2\mu-1)\pi}{2n} = \alpha_\mu + j\beta_\mu \qquad \mu = 1...4 \tag{15}$$

Dosazením získáme:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.22484 + 1.07150j \\ s_2 &= -0.22484 - 1.07150j \\ s_3 &= -0.54283 + 0.44383j \\ s_4 &= -0.54283 - 0.44383j \end{aligned}$$

Hodnoty konstant α_μ a β_μ tedy jsou:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = -0.22484 & \beta_1 = 1.07150 \\ \alpha_2 = -0.22484 & \beta_2 = -1.07150 \\ \alpha_3 = -0.54283 & \beta_3 = 0.44383 \\ \alpha_4 = -0.54283 & \beta_4 = -0.44383 \end{array}$$

Nyní již můžeme vypočítat přenosovou funkci ze vztahů:

$$H_C(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon 2^{n-1}} \left[(s+a) \displaystyle\prod_{\mu=1}^{(n-1)/2} \left(s^2 - 2\alpha_\mu s + \alpha_\mu^2 + \beta_\mu^2 \right) \right]^{-1} & \text{pro lichá } n \\ \dfrac{1}{\varepsilon 2^{n-1}} \left[\displaystyle\prod_{\mu=1}^{n/2} \left(s^2 - 2\alpha_\mu s + \alpha_\mu^2 + \beta_\mu^2 \right) \right]^{-1} & \text{pro sudá } n \end{cases} \tag{16}$$

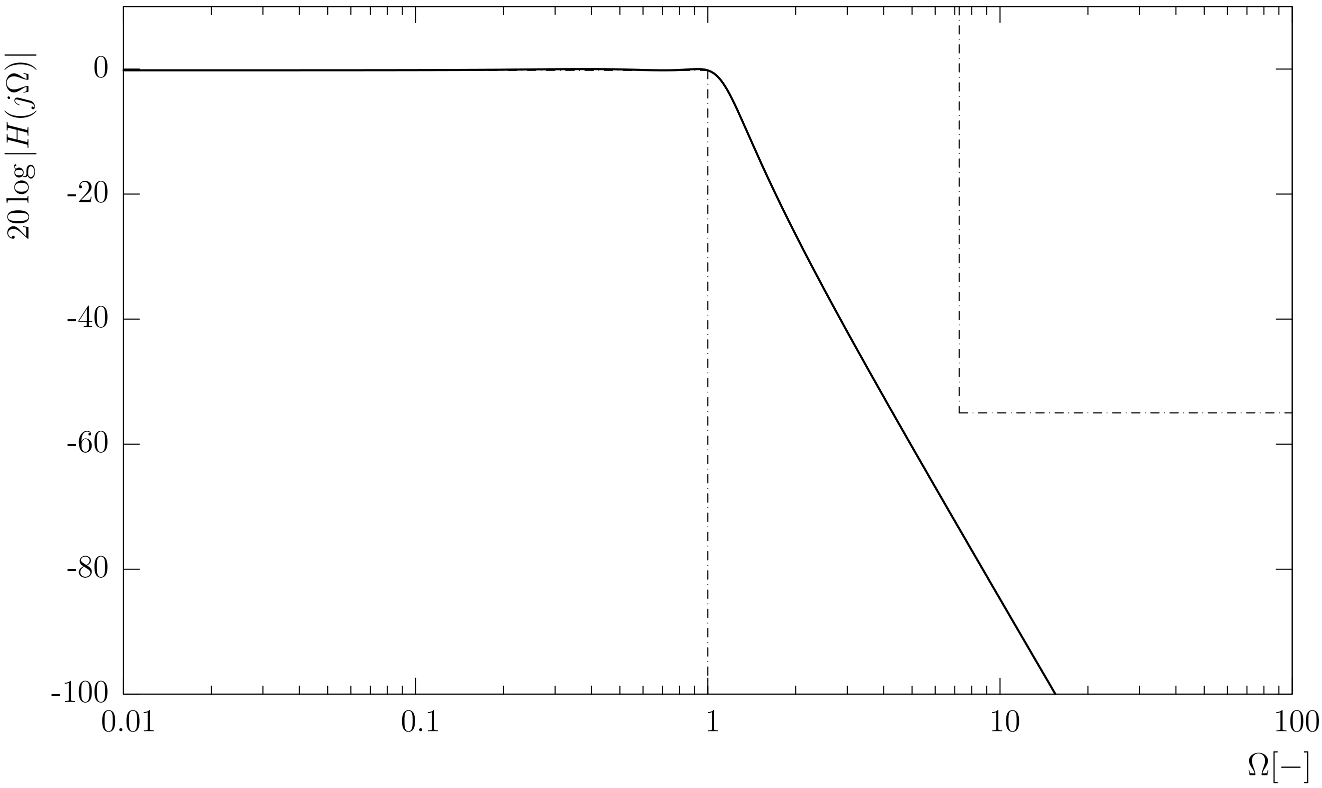
Dosazením získáme přenosovou funkci:

$$H_C(s) = \frac{1.00000}{1.73620 s^4 + 2.66570 s^3 + 3.78240 s^2 + 2.64340 s + 1.02320} \tag{17}$$

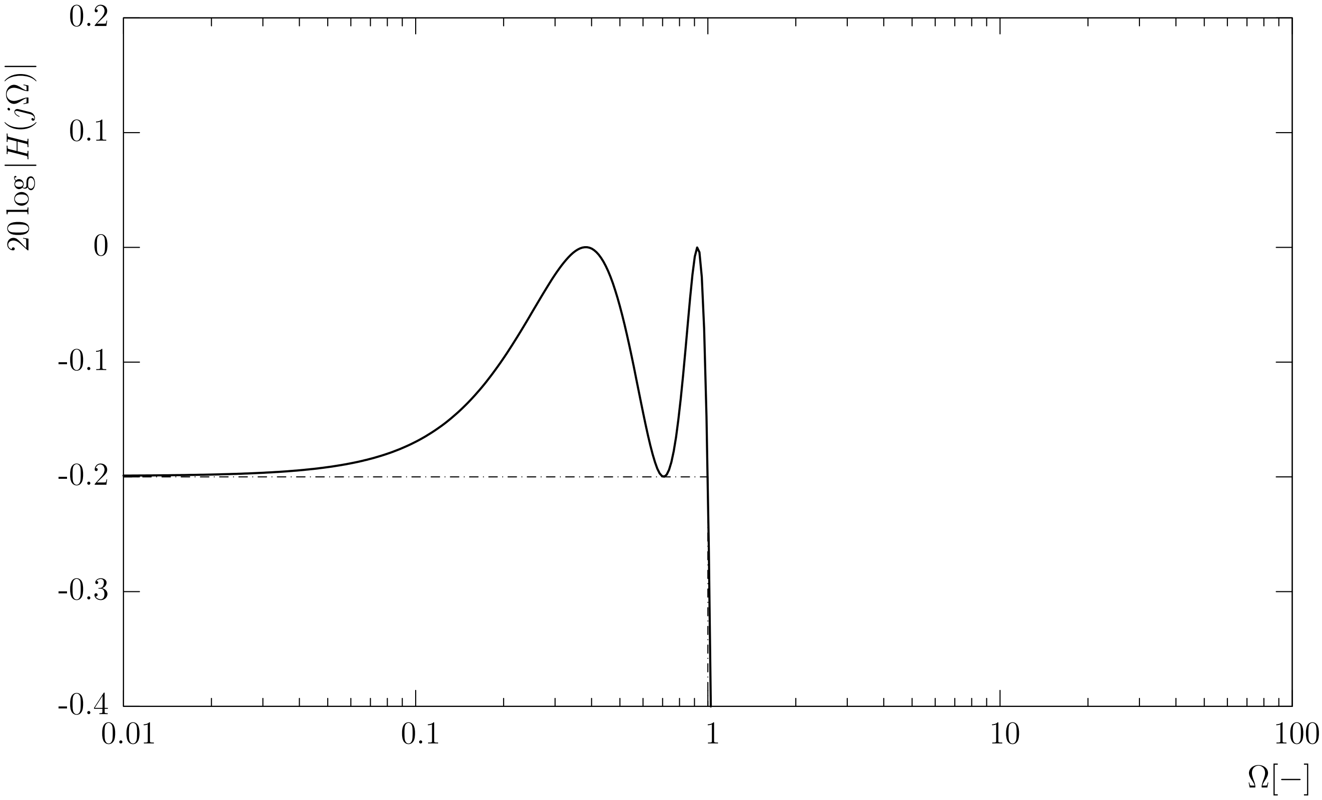
Skupinové zpoždění určíme ze vztahu:

$$\tau_C(\Omega) = -\frac{\mathrm{d} \arg(H(j\Omega))}{\mathrm{d}\,\Omega} \tag{18}$$

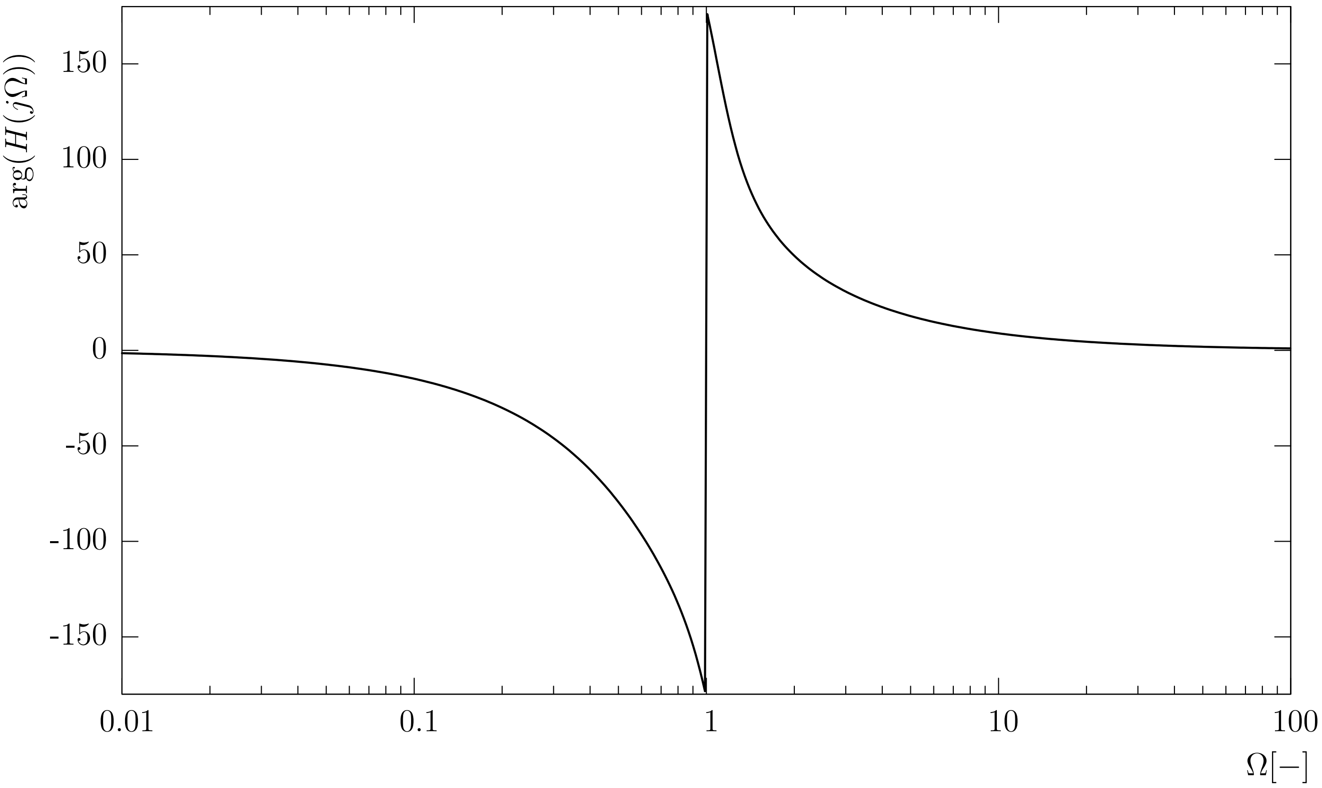
Čebyševova aproximace — amplitudová charakteristika



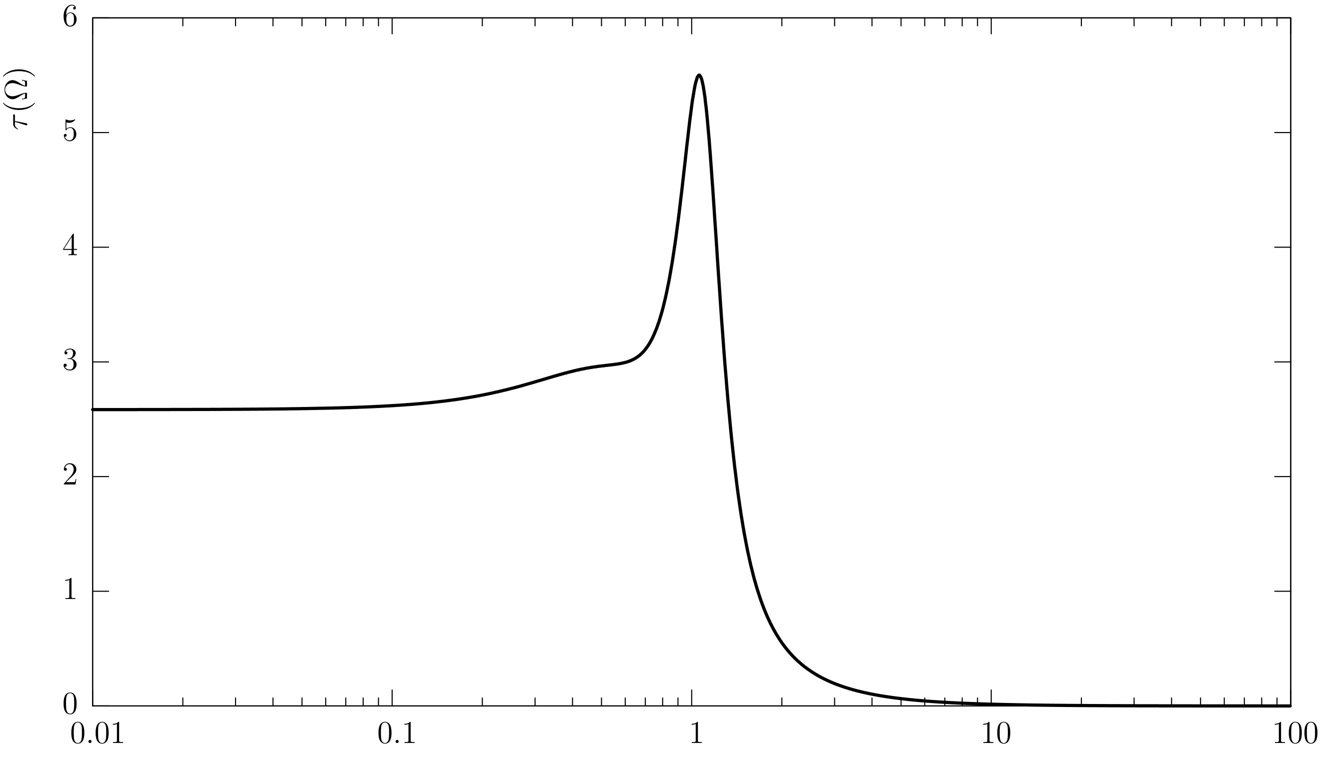
Čebyševova aproximace — detail



Čebyševova aproximace — fázová charakteristika



Čebyševova aproximace — skupinové zpoždění



2 Návrh LC filtru

2.1 Butterworthova aproximace

Určíme normovanou vstupní impedanci filtru:

$$z_{\mathrm{vst}}(s) = \frac{H^{-1}(s) - \varphi(s)}{H^{-1}(s) + \varphi(s)} \tag{19}$$

kde $\varphi(s)$ se vypočítá takto:

$$\varphi(s) = \varepsilon s^n \tag{20}$$

Po dosazení vyjde:

$$z_{\mathrm{vst}}(s) = \frac{0.83090s^3 + 1.59050s^2 + 1.78350s + 0.99997}{0.43406s^4 + 0.83090s^3 + 1.59050s^2 + 1.78350s + 0.99997} \tag{21}$$

Rozvedeme v řetězový zlomek:

$$z_{\mathrm{vst}}(s) = \cfrac{1}{0.5224s + \cfrac{1}{1.2612s + \cfrac{1}{1.2613s + \cfrac{1}{0.5223s + 1.0000}}}} \tag{22}$$

Normované hodnoty součástek tedy jsou:

$$c_1 = 0.522400, \quad l_2 = 1.261200, \quad c_3 = 1.261300, \quad l_4 = 0.522310 \tag{23}$$

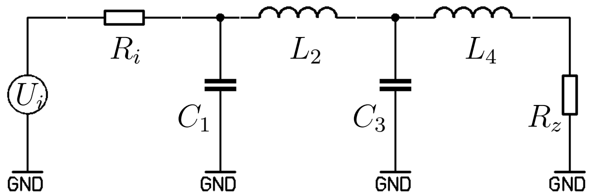
Po odnormování podle vztahů:

$$C_x = \frac{c_x}{2\pi f_p R_0}, \qquad L_x = \frac{l_x R_0}{2\pi f_p}, \qquad R_x = r_x R_0 \tag{24}$$

Odnormované hodnoty součástek tedy jsou:

$$C_1 = 4.16\,\mu\mathrm{F}, \quad L_2 = 25.09\,\mathrm{mH}, \quad C_3 = 10.04\,\mu\mathrm{F}, \quad L_4 = 10.39\,\mathrm{mH}, \quad R_z = 50.0\,\Omega \tag{25}$$

Obvodové schéma:



2.2 Čebyševova aproximace

Určíme normovanou vstupní impedanci filtru:

$$z_{\text{vst}}(s) = \frac{H^{-1}(s) - \varphi(s)}{H^{-1}(s) + \varphi(s)} \tag{26}$$

kde $\varphi(s)$ se vypočítá takto:

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2^{n-1} s\varepsilon \prod_{\mu=1}^{(n-1)/2} \left(s^2 + \cos^2 \frac{(2\mu - 1)\,\pi}{2n} \right) & \text{pro lichá } n \\ 2^{n-1} \varepsilon \prod_{\mu=1}^{n/2} \left(s^2 + \cos^2 \frac{(2\mu - 1)\,\pi}{2n} \right) & \text{pro sudá } n \end{cases} \tag{27}$$

Po dosazení vyjde:

$$z_{\text{vst}}(s) = \frac{2.66570 s^3 + 2.04620 s^2 + 2.64340 s + 0.80618}{3.47240 s^4 + 2.66570 s^3 + 5.51860 s^2 + 2.64340 s + 1.24020} \tag{28}$$

Rozvedeme v řetězový zlomek:

$$z_{\text{vst}}(s) = \cfrac{1}{1.3026 s + \cfrac{1}{1.2846 s + \cfrac{1}{1.9758 s + \cfrac{1}{0.8469 s + 0.6500}}}} \tag{29}$$

Normované hodnoty součástek tedy jsou:

$$c_1 = 1.302600, \quad l_2 = 1.284600, \quad c_3 = 1.975800, \quad l_4 = 0.846880 \tag{30}$$

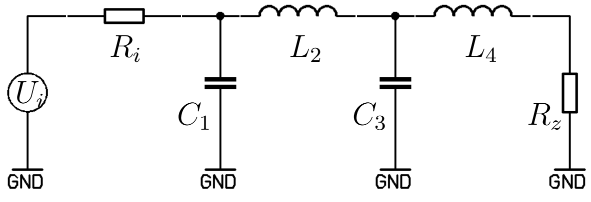
Po odnormování podle vztahů:

$$C_x = \frac{c_x}{2\pi f_p R_0}, \quad L_x = \frac{l_x R_0}{2\pi f_p}, \quad R_x = r_x R_0 \tag{31}$$

Odnormované hodnoty součástek tedy jsou:

$$C_1 = 10.36\,\mu\text{F}, \quad L_2 = 25.56\,\text{mH}, \quad C_3 = 15.72\,\mu\text{F}, \quad L_4 = 16.85\,\text{mH}, \quad R_z = 32.5\,\Omega \tag{32}$$

Obvodové schéma:



3 Návrh aktivního RC filtru — Butterworthova aproximace

Přenosová funkce Butterworthovy aproximace je:

$$H(s) = 4.6077 \frac{1}{(p^2 + 2.7072\,p + 2.1465)\,(p^2 + 1.1212\,p + 2.1465)} \tag{33}$$

Filtr proto realizujeme pomocí bloků S-K, které mají přenosovou funkci:

$$H(p) = \frac{H_0\omega_m^2}{p^2 + \dfrac{\omega_m}{Q_m}p + \omega_m^2} \tag{34}$$

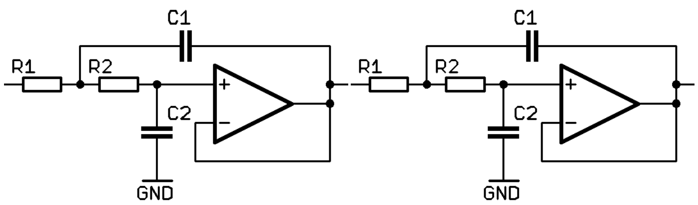
$$H(p) = \frac{A}{p^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + p\left[(R_1 + R_2)\,C_2 + (1 - A)\,R_1 C_1\right] + 1} \tag{35}$$

Z těchto rovnic plynou tyto vztahy pro hodnoty součástek (součásteky, které volíme jsou $R_1 = R_2 = R$ a R_3):

$$\omega_m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad Q_m = \frac{\omega_m}{2\alpha}, \quad C_2 = \frac{1}{2R\omega_p\omega_m Q_p}, \quad C_1 = 4Q_p^2 C_2 \tag{36}$$

Protože Butterworthova aproximace je 4. stupně, potřebný počet S-K bloků je 2. Volíme $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Dosazením do rovnic (36) získáme tyto hodnoty součástek:

blok	ω_m	Q_m	R_1	R_2	C_1	C_2
	s^{-1}	-	kΩ	kΩ	nF	nF
1	1.465	1.307	10.0	10.0	54.32	10.39
2	1.465	0.541	10.0	10.0	54.32	25.09



Závěr

Navržené LC a ARC filtry jsem zkontroloval pomocí `SPICE` analýzy a výsledky odpovídají aproximačním funkcím. U Čebyševova LC filtru je třeba dát pozor na asymetrii mezi výstupním odporem předcházejícího obvodu a vstupním odporem následujícího obvodu, pro který je filtr navržen.

U ARC filtru je potřeba dát pozor na výstupní odpor předchozího obvodu a vstupní odpor následujícího obvodu. Pokud je výstupní odpor předcházejícího obvodu $R_o > 0.01\,R_1$, pak je nutné zařadit odělující zesilovač, nebo snížit hodnotu odporu R_1 o velikost R_o.

Skupinové zpoždění Čebyševova filtru má horší průběh než skupinové zpoždění Butterworthova filtru — je více zvlněné a má vyšší hodnotu maxima.